

BAB II

LANDASAN TEORI

2.1 Teori Antrian

Teori antrian pertama kali disusun oleh Agner Krarup Erlang yang hidup pada periode 1878-1929. Dia merupakan seorang insinyur Demark yang bekerja di industri telepon. Pada awal abad 20, Erlang melakukan percobaan yang melibatkan fluktuasi permintaan fasilitas telepon dan pengaruhnya pada peralatan pemutaran. Bila pengelolaan deretan antriannya kacau, maka penggunaan peralatan akan kurang optimal dan pelanggan menjadi tidak puas. Antrian akan muncul bila terjadi permintaan sambungan telepon, dimana saluran yang ada sedang digunakan semua. Erlang membuat suatu formula agar antrian permintaan telepon terhadap keterbatasan peralatan menjadi lebih optimal, dimana pada akhirnya disebut dengan formula *Erlang*.

2.1.1 Dasar Teori Antrian

Dalam suatu organisasi selalu ada contoh proses yang menimbulkan deretan tunggu yang disebut antrian. Deretan unit harus menunggu untuk memperoleh pelayanan karena fasilitas pelayanan terbatas dan tidak bisa memenuhinya secara bersamaan.

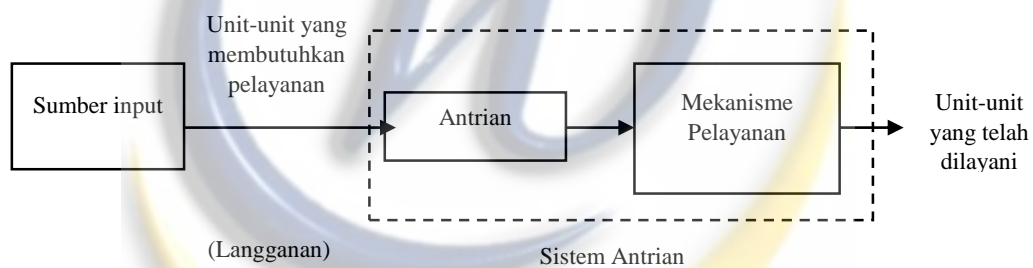
Bila berpergian dengan pesawat maka akan dihadapkan dengan berbagai deretan antrian. Untuk membeli karcis, orang harus berdiri dalam deretan menuju loket agen perjalanan. Begitu tiba di lapangan udara, orang harus berdiri pada deretan pemeriksaan bagasi dan pemeriksaan paspor. Di dalam pesawat penumpang harus berdiri lagi dalam deretan untuk mendapatkan tempat duduk. Ini adalah contoh dalam kehidupan sehari-hari tentang antrian.

2.1.2 Pengertian Teori Antrian

Menurut Taha (2007) teori antrian adalah teori yang menyangkut studi matematis dari antrian-antrian atau baris-baris penungguan. Formasi baris-baris penungguan merupakan sesuatu yang biasa terjadi apabila kebutuhan akan suatu pelayanan melebihi kapasitas yang tersedia untuk menyelenggarakan pelayanan tersebut.

Apabila pelayanan terlalu banyak maka akan memerlukan biaya yang besar, sebaliknya jika kapasitas pelayanan kurang maka akan terjadi baris penungguan dalam waktu yang cukup lama yang juga akan menimbulkan biaya baik berupa ongkos sosial, kehilangan langganan ataupun pengangguran kerja. Tujuan utama teori antrian ialah mencapai keseimbangan antara ongkos pelayanan dengan ongkos yang disebabkan oleh adanya waktu menunggu tersebut.

Proses yang terjadi pada model antrian dapat digambarkan seperti berikut :



Gambar 2.1 Model Antrian

Sumber : Taha (2007)

Unit-unit langganan yang memerlukan pelayanan yang diturunkan dari suatu sumber input memasuki sistem antrian dan ikut dalam antrian. Dalam waktu tertentu, anggota antrian ini dipilih untuk dilayani. Pemilihan ini didasarkan pada suatu antrian tertentu yang disebut “disiplin pelayanan” atau “*service discipline*”. Pelayanan yang diperlukan dilaksanakan dengan suatu “mekanisme pelayanan” tertentu (*service mechanism*). Setelah itu unit-unit langganan meninggalkan sistem antrian.

Khusus masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini, yang dimaksud dengan aliran konsumen yang datang adalah saat mesin tenun mengalami kerusakan, dan fasilitas pelayanan adalah karyawan teknisi mesin yang bertugas untuk memperbaiki mesin yang rusak.

2.1.3 Karakteristik Antrian

Menurut Heizer dan Render (2006), ada tiga komponen karakteristik dalam sistem antrian :

1. Karakteristik Kedatangan

Sumber input yang mendatangkan pelanggan bagi sebuah sistem pelayanan memiliki karakteristik sebagai berikut :

a. Ukuran populasi

Merupakan sumber konsumen atau sumber kedatangan dalam sistem antrian yang meliputi :

- Populasi yang tidak terbatas : jumlah kedatangan atau pelanggan pada sebuah waktu tertentu hanyalah sebagian kecil dari semua kedatangan yang potensial.
- Populasi yang terbatas : sebuah antrian ketika ada pengguna pelayanan yang potensial dengan jumlah terbatas.

b. Perilaku kedatangan

Perilaku konsumen berbeda-beda dalam memperoleh pelayanan, ada tiga karakteristik perilaku kedatangan yaitu :

- Pelanggan yang sabar adalah mesin atau orang-orang yang menunggu dalam antrian hingga mereka dilayani dan tidak berpindah dalam garis antrian.
- Pelanggan yang menolak tidak mau bergabung dalam antrian karena merasa terlalu lama waktu yang dibutuhkan untuk dapat memenuhi kebutuhan mereka.
- Pelanggan yang membelot adalah pelanggan yang berada dalam antrian akan tetapi menjadi tidak sabar dan meninggalkan antrian tanpa melengkapi transaksi mereka.

c. Pola kedatangan

Menggambarkan bagaimana distribusi pelanggan memasuki sistem.

Distribusi kedatangan terdiri dari :

- *Constant Arrival Distribution* : pelanggan yang datang setiap periode tertentu.
- *Arrival Pattern Random* : pelanggan yang datang secara acak.

2. Disiplin Antrian

Disiplin antrian merupakan aturan antrian yang memilih konsumen mana yang akan dilayani lebih dahulu. Ada empat disiplin antrian yang secara umum harus diketahui, yaitu :

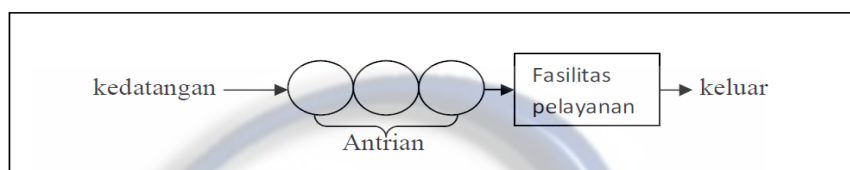
- a. *First Come First Serve (FCFS)* : merupakan disiplin antrian yang digunakan di beberapa tempat dimana pelanggan yang datang pertama akan dilayani terlebih dahulu. Antrian sistem ini biasa digunakan di bioskop, bank, dan lain-lain.
- b. *Last Come First Serve (LCFS)* : merupakan disiplin antrian dimana pelanggan yang terakhir datang mendapatkan pelayanan lebih dahulu.
- c. *Shortest Operation Times (SOT)* : merupakan sistem pelayanan dimana pelanggan yang membutuhkan waktu pelayanan tersingkat mendapatkan pelayanan pertama.
- d. *Service in Random Order (SIRO)* : merupakan sistem pelayanan dimana pelanggan mungkin akan dilayani secara acak (*random*), tidak peduli siapa yang lebih dahulu tiba untuk dilayani.

3. Fasilitas Pelayanan

Komponen ketiga dari setiap sistem antrian adalah karakteristik pelayanan. Pelayanan pada umumnya digolongkan menurut jumlah saluran yang ada (sebagai contoh jumlah kasir) dan jumlah tahapan (sebagai contoh jumlah pemberhentian yang harus dibuat). Desain sistem pelayanan dapat digolongkan sebagai berikut :

- *Single channel – single phase*

Single Channel berarti hanya ada satu jalur yang memasuki sistem pelayanan atau ada satu fasilitas pelayanan. *Single Phase* berarti hanya ada satu fasilitas pelayanan. Contohnya adalah sebuah kantor pos yang hanya mempunyai satu loket pelayanan dengan jalur satu antrian, supermarket yang hanya memiliki satu kasir sebagai tempat pembayaran, dan lain-lain.

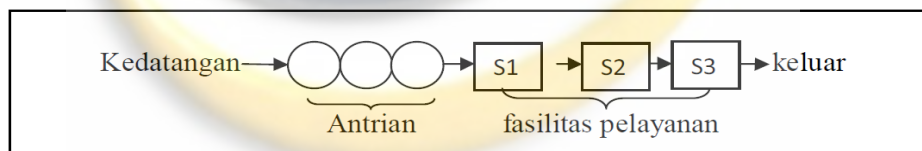


Gambar 2.2 *Single Channel – Single Phase*

Sumber : Heizer dan Render (2006)

- *Single Channel – Multi Phase*

Sistem antrian jalur tunggal dengan tahapan berganda ini atau menunjukkan ada dua atau lebih pelayanan yang dilaksanakan secara berurutan. Sebagai contoh adalah : pencucian mobil, tukang cat mobil, dan sebagainya.

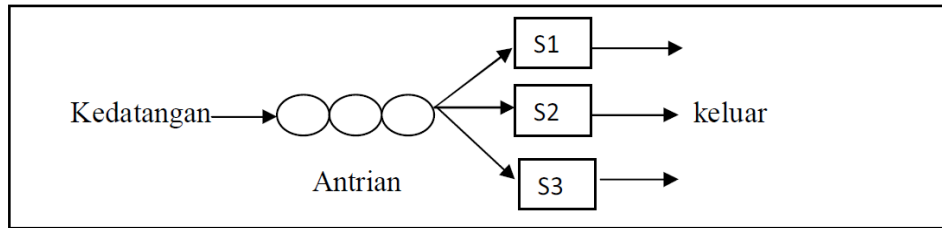


Gambar 2.3 *Single Channel – Multi Phase*

Sumber : Heizer dan Render (2006)

- *Multi Channel – Single Phase*

Sistem *Multi Channel – Single Phase* terjadi di mana ada dua atau lebih fasilitas pelayanan dialiri oleh antrian tunggal. Contohnya adalah antrian pada sebuah bank dengan beberapa *teller*, pembelian tiket atau karcis yang dilayani oleh beberapa loket, pembayaran dengan beberapa kasir, dan lain-lain.

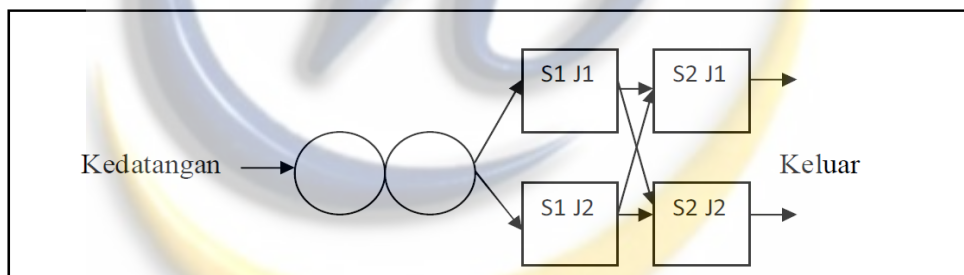


Gambar 2.4 *Multi Channel – Single Phase*

Sumber : Heizer dan Render (2006)

- *Multi Channel – Multi Phase*

Sistem *Multi Channel – Multi Phase* ini menunjukkan bahwa setiap sistem mempunyai beberapa fasilitas pelayanan pada setiap tahap sehingga terdapat lebih dari satu pelanggan yang dapat dilayani pada waktu bersamaan. Contoh pada model ini adalah : pada pelayanan yang diberikan kepada pasien di rumah sakit dimulai dari pendaftaran, *diagnose*, tindakan medis, sampai pembayaran, registrasi ulang mahasiswa baru pada sebuah universitas, dan lain-lain.



Gambar 2.5 *Multi Channel – Multi Phase*

Sumber : Heizer dan Render (2006)

2.1.4 Pola Kedatangan dan Waktu Pelayanan

2.1.4.1 Pola Kedatangan

Menurut Taha (2007) dalam bukunya “*Operation Research*”, Pola kedatangan suatu sistem antrian dapat dipresentasikan oleh waktu antar kedatangan yang merupakan suatu periode waktu antara dua kedatangan yang berturut-turut. Kedatangan dapat dipisahkan oleh interval kedatangan yang sama atau tidak sama probabilitasnya disebut kedatangan acak. Tingkat kedatangan yaitu jumlah

pelanggan yang datang per satuan unit waktu. Jika kedatangan bersifat acak, harus diketahui dahulu distribusi probabilitas kedatangannya.

Suatu proses kedatangan dalam suatu sistem antrian artinya menentukan distribusi probabilitas untuk jumlah kedatangan untuk suatu periode waktu. Pada umumnya, suatu proses kedatangan terjadi secara acak dan *independent* terhadap proses kedatangan lainnya dan tidak dapat diprediksi kapan pelanggan akan datang. Dalam hal ini, distribusi probabilitas *Poisson* menyediakan deskripsi yang cukup baik untuk suatu pola kedatangan. Suatu fungsi probabilitas *Poisson* untuk suatu kedatangan x pada suatu periode waktu adalah sebagai berikut :

$$F_i(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

Dimana :
 x = jumlah kedatangan per periode waktu
 λ = rata-rata jumlah kedatangan per periode waktu
 e = bilangan natural logaritma 2,71828

Uji Kesesuaian *Poisson*

Uji kesesuaian *Poisson* dilakukan dengan uji Khi-Kuadrat (χ^2) yang didefinisikan sebagai berikut:

H_0 = data yang diuji mengikuti distribusi
 H_1 = data yang diuji tidak mengikuti distribusi

Statistik test didefinisikan sebagai berikut :

$$X^2_{hitung} = \sum \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

Dimana :
 f_i = frekuensi observasi ke-i
 e_i = frekuensi harapan ke-i

Dalam uji Chi Square, data observasi mengikuti distribusi saat $X^2_{hitung} \leq X^2_{hitung}$.

2.1.4.2 Pola Pelayanan

Menurut Taha (2007) dalam bukunya “*Operation Research*”, Pola pelayanan ditentukan oleh waktu pelayanan yaitu waktu yang dibutuhkan untuk melayani pelanggan pada fasilitas pelayanan. Waktu pelayanan dapat berupa waktu pelayanan konstan ataupun variabel acak yang telah diketahui probabilitasnya. Tingkat pelayanan adalah jumlah pelanggan yang dilayani per satuan waktu.

Waktu pelayanan antara fasilitas pelayanan dengan fasilitas pelayanan yang lain biasanya tidak konstan. Distribusi probabilitas untuk waktu layanan biasanya mengikuti distribusi probabilitas Eksponensial yang formulanya dapat memberikan informasi yang berguna mengenai operasi yang terjadi pada suatu antrian. Persamaan distribusi Eksponensialnya adalah sebagai berikut :

$$G(t) = \int_{t_1}^{t_2} \mu * e^{-\mu t} dt$$
$$= e^{-\mu * t_1} - e^{-\mu * t_2}$$

Dimana : $t_2 > t$ = batas kelas interval
: t = $1/\mu$ = harga rata-rata waktu perbaikan
: e = bilangan natural logaritma 2,71828

Uji Kesesuaian Eksponensial

Uji kesesuaian Ekponensial dilakukan dengan uji Khi-Kuadrat (χ^2) yang didefinisikan sebagai berikut:

H_0 = data yang diuji mengikuti distribusi
 H_i = data yang diuji tidak mengikuti distribusi

Statistik test didefinisikan sebagai berikut :

$$X^2_{hitung} = \sum \frac{(f_i - e_i)^2}{e_i}$$

Dimana : f_i = frekuensi observasi ke-i
 e_i = frekuensi harapan ke-i

Dalam uji Chi Square, data observasi mengikuti distribusi saat $X^2_{hitung} \leq X^2_{hitung}$.

2.1.5 Simbol yang Digunakan dalam Sistem Antrian

Berikut ini akan diberikan beberapa simbol matematis untuk menyatakan beberapa variabel dan parameter yang digunakan dalam membahas suatu sistem antrian, yaitu :

- n = banyaknya satuan dalam sistem antrian.
- $P_n(t)$ = kemungkinan terdapat n satuan dalam sistem pada saat t.
- λ = jumlah rata-rata kedatangan satuan dalam sistem persatuan waktu.
- λ_n = jumlah rata-rata kedatangan satuan dalam sistem bila barisan telah sepanjang n.
- μ = jumlah rata-rata satuan yang selesai dilayani oleh sistem persatuan waktu.
- μ_n = jumlah rata-rata satuan yang selesai dilayani oleh sistem bila panjang barisan adalah n.
- r = jumlah satuan pelayanan yang paralel.
- L_s = jumlah rata-rata satuan dalam sistem.
- L_q = jumlah rata-rata satuan dalam antrian.

2.1.6 Notasi yang Digunakan dalam Model Antrian

Untuk menggambarkan model antrian, maka digunakan notasi yang sesuai dengan notasi *Kendall-Lee*. Adapun bentuk notasinya adalah sebagai berikut :

$$(a/b/c):(d/e/f)$$

Dimana :

- a = distribusi kedatangan atau kebutuhan pelayanan.
- b = distribusi waktu pelayanan.
- c = jumlah stasiun pelayanan atau operator yang paralel dalam sistem antrian.
- d = disiplin pelayanan.
- e = jumlah antrian yang diijinkan dalam sistem atau kapasitas sistem.

f = sumber kedatangan kebutuhan atau kapasitas sistem.

Adapun simbol yang menyatakan notasi diatas adalah :

(Simbol a dan b)

M : menyatakan distribusi kedatangan adalah *poisson* dan distribusi waktu pelayanan adalah eksponensial.

E_k : menyatakan distribusi waktu antar kedatangan dan pelayanan adalah *Erlang*.

GI : menyatakan distribusi kedatangan atau antar kedatangan adalah umum yang independen (*General Independent*).

(Simbol c)

r : bilangan bulat positif yang bisa sama dengan satu atau lebih dari satu.

(Simbol d)

FCFS : *First Come, First Served.*

LCFS : *Last Come First Served.*

SOT : *Shortest Operation Times.*

SIRO : *Service In Random Order.*

(Simbol e dan f)

N : menyatakan satuan yang terbatas.

\sim : menyatakan satuan tak terbatas.

2.1.7 Proses Terbentuknya Antrian

Pada kesempatan ini sistem antrian yang dibahas adalah sistem antrian dengan proses kedatangan *poisson* dan proses kepergian *poisson*. Proses kepergian *poisson* ini dapat dinyatakan dengan cara lain, yaitu waktu pelayanan berdistribusi eksponensial.

Proses terbentuknya antrian atau barisan sepanjang n satuan ($n > 1$) dalam sistem dari saat $t \rightarrow t + h$, adalah sebagai berikut :

- a. Pada saat t ada $(n-1)$ satuan dalam barisan, dan dalam waktu singkat h berikutnya ada satu satuan yang datang, tetapi tak ada satuan yang selesai diberi pelayanan. Kemungkinan keadaan ini dapat terjadi adalah :

$$p_{n-1}(t) * \lambda_{n-1}h * (1 - \mu_{n-1}h)$$

- b. Pada saat t ada $(n+1)$ satuan dalam barisan, dalam waktu singkat h tak ada satuan yang datang, tapi ada satu satuan yang selesai diberi pelayanan. Kemungkinan keadaan ini dapat terjadi adalah :

$$p_{n+1}(t) * (1 - \lambda_{n+1}h) * \mu_{n+1}h$$

- c. Pada saat t ada n satuan dalam barisan, dalam waktu singkat h berikutnya ada satu satuan yang datang dan satu satuan yang selesai diberi pelayanan. Kemungkinan hal ini dapat terjadi adalah :

$$p_n(t) * \lambda_n h * \mu_n h$$

- d. Pada saat t ada n satuan dalam barisan, dalam waktu singkat h berikutnya tak ada satuan yang datang dan yang selesai dilayani. Kemungkinan ini dapat terjadi adalah :

$$p_n(t) * (1 - \lambda_n h) * (1 - \mu_n h)$$

Jadi untuk mencapai n satuan dalam sistem antrian dapat terjadi melalui jalan a, b, c, dan d. Besarnya kemungkinan dapat dinyatakan sebagai penjumlahan kemungkinan keempat jalan diatas, yaitu :

$$p_n(t + h) = p(a) + p(b) + p(c) + p(d) \quad \dots (2.1)$$

Jadi :

$$\begin{aligned} p_n(t + h) = & p_{n-1}(t) * \lambda_{n-1}h * (1 - \mu_{n-1}h) & + \\ & p_{n+1}(t) * (1 - \lambda_{n+1}h) * \mu_{n+1}h & + \\ & p_n(t) * \lambda_n h * \mu_n h & + \\ & p_n(t) * (1 - \lambda_n h) * (1 - \mu_n h) & \dots(2.2) \end{aligned}$$

Jika persamaan (2.2) diuraikan, maka diperoleh :

$$\begin{aligned}
 p_n(t+h) = & p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}h - p_{n-1}(t)\lambda_{n-1}\mu_{n-1}h^2 & + \\
 & p_{n+1}(t)\lambda_{n+1}h - p_{n+1}(t)\lambda_{n+1}\mu_{n+1}h^2 & + \\
 & p_n(t)\lambda_n\mu_n h^2 + p_n(t) - p_n(t)\lambda_n h & - \\
 & p_n(t)\lambda_n h + p_n(t)\lambda_n\mu_n h^2 & \dots (2.3)
 \end{aligned}$$

Dari persamaan (2.3) diatas, suku-suku yang mengandung h^2 dapat dihapuskan/diabaikan, sehingga diperoleh :

$$\frac{p_n(t+h) - p_n(t)}{h} = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) - \lambda_n p_n(t) - \mu_n p_n(t)$$

Dengan mengambil harga $h \rightarrow 0$, maka diperoleh diferensial dari persamaan diatas, yaitu :

$$p_n(t) = \lambda_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t) \quad \dots (2.4)$$

Selanjutnya untuk $n = 0$ dari saat $t \rightarrow t + h$ dapat disusun persamaan dasar sebagai berikut :

- e. Pada saat t ada 0 satuan dalam barisan dan dalam waktu singkat h berikutnya tak ada satuan yang datang. Kemungkinan hal ini dapat terjadi adalah :

$$p_0(t) * (1 - \lambda_0 h)$$

- f. Pada saat t ada 1 satuan dalam barisan dan dalam waktu singkat h berikutnya tak ada satuan yang datang, tapi ada satuan yang selesai diberi pelayanan.

Kemungkinan terjadinya hal ini adalah :

$$p_1(t) * (1 - \lambda_1 h) * \mu_1 h$$

Jadi untuk mempunyai 0 satuan dalam sistem antrian, dapat terjadi melalui cara e dan f, dimana besar kemungkinannya dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$p_0(t+h) = p_0(t) * (1 - \lambda_0 h) + p_1(t) * (1 - \lambda_1 h) * \mu_1 h$$

$$p_0(t+h) = p_0(t) - p_0(t)\lambda_0 h + p_1(t)\lambda_1 h - p_1(t)\lambda_1 * \mu_1 h^2$$

Karena harga h^2 sangat kecil, maka suku-suku yang mengandung h^2 dapat dihilangkan, dan suku $p_0(t)$ dipindahkan ke sebelah kiri dari persamaan, sehingga dapat diperoleh :

$$p_0(t+h) - p_0(t) = \mu_1 * p_1(t)h - \lambda_0 * p_0(t)h \quad \dots (2.5)$$

Dari persamaan (2.5) diatas diperoleh persamaan diferensial :

$$p_0(t) = \mu_1 * p_1(t) - \lambda_0 * p_0(t) \quad \dots (2.6)$$

Jadi ada 2 persamaan diferensial yang merupakan persamaan dasar yang menguasai antrian, yaitu :

$$p_0(t) = \mu_1 * p_1(t) - \lambda_0 * p_0(t) \quad \text{untuk } n = 0 \dots (2.7)$$

$$p_n(t) = \lambda_{n-1}p_{n-1}(t) + \mu_{n+1}p_{n+1}(t) - (\lambda_n + \mu_n)p_n(t) \quad \text{untuk } n \geq 1 \dots (2.8)$$

Persamaan (2.7) dan (2.8) memperlihatkan bahwa fungsi yang terbentuk bergantung kepada unsur waktu. Dalam keadaan *steady* fungsi tersebut tidak bergantung kepada unsur waktu. Keadaan *steady* dapat diperoleh untuk $t \rightarrow \infty$ sehingga :

$$p_n(t) = p_n \text{ dan } p_n(t) = 0 \text{ untuk } n \geq 0$$

Sehingga persamaan (2.7) dan (2.8) berubah menjadi :

$$\mu_1 * p_1 - \lambda_0 * p_0 \quad n = 0 \quad \dots (2.9)$$

$$\lambda_{n-1}p_{n-1} + \mu_{n+1}p_{n+1} - (\lambda_n + \mu_n)p_n = 0 \quad n \geq 1 \quad \dots (2.10)$$

2.1.8 Model Antrian (M/M/1) : (FCFS/N/N)

Pada model antrian dengan sumber terbatas ini, populasi yang akan masuk kedalam sistem antrian memiliki jumlah terbatas. Sebagai contoh, seorang operator teknisi mesin ditugaskan untuk menangani sejumlah m mesin.

Apabila sistem berada dalam keadaan E_n ($n = 0,1,2,\dots,m$) pada saat t , maka ada $(m-n)$ mesin dalam keadaan bekerja. Kemungkinan ada sebuah mesin yang rusak atau perlu pelayanan dalam selang waktu t sampai $t + h$ adalah $(m-n) \lambda$, sehingga untuk model seperti ini diperoleh :

$$\lambda_0 = m * \lambda \quad \mu_0 = 0 \quad \text{jika } m = 0$$

$$\lambda_n = (m - n)\lambda \quad \mu_n = \mu \quad \text{jika } 1 \leq n \leq m$$

Bertitik tolak dari persamaan (2.9) dan (2.10) diperoleh :

$$m * \lambda p_0 = \lambda * p_1 \quad \text{jika } n = 0$$

$$((m - n)\lambda + \mu)p_n = (m - n + 1)\lambda * p_{n-1} + \lambda * p_{n+1} \quad \text{jika } 1 \leq n \leq m$$

Atau :

$$m * \frac{\lambda}{\mu} * p_0 = p_1 \quad \text{jika } n = 0$$

$$((m - n) \frac{\lambda}{\mu} + 1)p_n = ((m - n + 1) \frac{\lambda}{\mu} p_{n-1}) + p_{n+1} \quad \text{jika } 1 \leq n \leq m$$

Selanjutnya p_n dapat dinyatakan dalam p_0 , m , λ , dan μ maka persamaan terakhir menjadi :

Untuk $n = 1$

$$p_2 = ((m - 1) \frac{\lambda}{\mu} + 1)p_1 - m \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = (m - 1)m \frac{\lambda}{\mu} p_0 - m \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_2 = m(m - 1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) 2p_0$$

Untuk $n = 2$

$$p_3 = ((m - 1) \frac{\lambda}{\mu} + 1)p_2 - m \frac{\lambda}{\mu} p_1$$

$$p_3 = ((m - 2) \frac{\lambda}{\mu} + 1)(m(m - 1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) 2 * p_0) - (m - 1) \frac{\lambda}{\mu} m \frac{\lambda}{\mu} p_0$$

$$p_3 = m(m - 1)(m - 2) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) 3 * p_0$$

Untuk harga $n = 3,4,5,\dots,m$ akan diperoleh :

$$p_n = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * p_0$$

Secara umum dapat ditulis :

$$p_n = \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * p_0 \quad \dots (2.11)$$

Diketahui bahwa :

$$\sum_{n=0}^m P_n = 1$$

$$\sum_{n=0}^m \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n * p_0 = 1$$

Sehingga :

$$p_0 = \left[\sum_{n=0}^m \frac{m!}{(m-n)!} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \right]^{-1} \quad \dots (2.12)$$

Diketahui juga :

$$L_q = \sum_{n=0}^m (n-1) * P_n$$

$$L_s = \sum_{n=0}^m n * P_n$$

Dengan menyelesaikan kedua persamaan di atas lebih lanjut, maka diperoleh hasil persamaan sebagai berikut :

$$L_q = m - \frac{\lambda + \mu}{\lambda} (1 - P_0) \quad \dots (2.13)$$

$$L_s = L_q + (1 - P_0) \quad \text{atau} \quad \dots (2.14)$$

$$L_s = m - \frac{\mu}{\lambda} (1 - P_0) \quad \dots (2.15)$$

Apabila didalam suatu persoalan diketahui waktu antara kedatangan dua pelanggan yang berurutan adalah T_i , maka rumus λ adalah sebagai berikut :

$$\lambda = 1/T_i \quad m = 1$$

$$\lambda = m * 1/T_i \quad m > 1$$

Dimana m misalnya adalah jumlah mesin yang ditangani oleh seorang operator teknisi.

2.1.8.1 Jumlah Rata-Rata Mesin Tidak Bekerja (L_s)

$$L_s = L_q + (1 - P_0) \quad \text{atau}$$

$$L_s = m - \frac{\mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

2.1.8.2 Jumlah Rata-Rata Mesin Menunggu Perbaikan (L_q)

Adapun jumlah rata-rata mesin menunggu perbaikan tidak termasuk yang sedang diperbaiki, yaitu :

$$L_q = m - \frac{\lambda + \mu}{\lambda}(1 - P_0)$$

2.1.8.3 Efisiensi Mesin Tenun Rata-Rata (E)

Untuk mengukur efisiensi mesin rata-rata dapat diperoleh dengan cara :

$$E = \frac{m - L_s}{m} * 100\%$$

Dimana : m = jumlah mesin tenun yang ditangani operator teknisi

2.2 Beberapa Biaya yang Terkait

Untuk menentukan jumlah operator teknisi mesin yang optimum adalah dengan jalan mencari jumlah operator teknisi mesin dengan biaya yang paling kecil. Beberapa biaya yang terkait didalamnya adalah sebagai berikut : (Subagyo, 1992)

1. Biaya tenaga operator teknisi mesin per satuan waktu yang dinyatakan dengan notasi Cr .

Dimana biaya ini adalah pendapatan atau gaji dari seorang operator teknisi mesin rata-rata per satuan waktu.

2. Biaya akibat mesin menganggur.

Mesin yang menganggur akan menyebabkan perusahaan kehilangan kesempatan untuk memperoleh sejumlah pendapatan, dimana pendapatan tersebut dapat digunakan untuk menutupi biaya tetap ataupun menjadi keuntungan perusahaan. Biaya menganggur mesin dinyatakan dengan notasi Cw dan biaya ini diperoleh dengan cara pemasukan yang terjadi seandainya mesin berjalan per satuan waktu dikurangi dengan pengeluaran seandainya mesin berjalan per satuan waktu.

2.3 Jumlah Mesin yang Dibebankan pada Seorang Operator Teknisi

Di dalam menentukan perhitungan jumlah mesin yang dibebankan pada seorang operator teknisi mesin dapat dipakai rumus sebagai berikut : (Subagyo, 1992)

$$TC(m) = \frac{Cr + Cw * Ls}{m} \quad \dots (2.16)$$

Dimana : TC = biaya total
 Cr = biaya operator teknisi mesin per satuan waktu
 Cw = biaya mesin menganggur per satuan waktu
 Ls = jumlah rata-rata mesin yang tidak bekerja
 m = jumlah mesin yang dibebankan pada seorang operator teknisi mesin

Dari persamaan diatas dapat terlihat bahwa biaya total (TC) merupakan fungsi dari nilai m .

Dengan melakukan percobaan terhadap nilai m pada persamaan (2.16) diatas, maka akan diperoleh nilai $TC(m)$ yang tertentu.

2.4 Waktu Terjadinya Kerusakan Mesin Rata-Rata

Waktu terjadinya kerusakan mesin tenun diamati pada saat mesin tenun selesai diperbaiki sampai pada saat mesin tenun mengalami kerusakan dan harus diperbaiki.

Jadi misalnya saja mesin selesai diperbaiki dan baru saja berjalan kembali pada waktu t_1 , dan waktu mesin mengalami kerusakan adalah t_2 , maka waktu terjadi kerusakan mesin adalah $T_1 = t_2 - t_1$.

Untuk menghitung kerusakan rata-rata mesin adalah dengan cara menjumlahkan seluruh waktu antara mesin selesai diperbaiki sampai saat mesin rusak kembali dibagi dengan jumlah data pengamatan. Secara matematis dapat ditulis sebagai berikut :

$$T = \frac{\sum T_i}{n}$$

- Dimana : T : waktu terjadi kerusakan mesin tenun rata-rata.
 T_i : waktu antara mesin selesai diperbaiki hingga mesin rusak kembali ke i .
 n : jumlah data antara dua kerusakan.
 $\bar{\lambda}$: jumlah mesin yang rusak rata-rata per satuan waktu.

2.5 Waktu Perbaikan Rata-Rata

Untuk menghitung waktu perbaikan mesin tenun rata-rata adalah dengan menjumlahkan seluruh waktu pelayanan dibagi dengan banyak data pengamatan, secara matematis dapat dituliska sebagai berikut :

$$t = 1\sqrt{\mu} = \frac{t_i}{n}$$

Dimana : t = lama waktu perbaikan rata-rata.
 t_i = lama waktu perbaikan ke i .
 n = jumlah data pengamatan.
 $\bar{\mu}$ = jumlah mesin rata-rata yang selesai diperbaiki per satuan waktu.

2.6 Test Kecukupan Sampel dan Keseragaman Data

Pengujian ini dilakukan untuk mengetahui apakah sampel yang diambil telah cukup mewakili populasi atau tidak. Sampel ideal dapat diambil dalam jumlah yang sangat banyak (tak terhingga) akan tetapi hal ini jelas tidak mungkin dilakukan mengingat faktor waktu, tenaga, biaya, dan lain-lain.

Dengan memutuskan untuk tidak mengambil sampel dalam jumlah yang sangat banyak, maka populasi objek (karakteristik dan sifat) tidak sepenuhnya tercermin oleh sampel yang diambil. Untuk itu kemudian dikenal dengan adanya tingkat ketelitian dan kepercayaan, untuk mendapatkan tingkat kepercayaan yang diinginkan oleh pengamat berkenaan dengan sampel yang diambil tersebut.

Tingkat ketelitian biasanya dalam persen merupakan penyimpangan maksimum hasil pengamatan dari keadaan yang sebenarnya, sedangkan tingkat keyakinan dan kepercayaan adalah besarnya keyakinan dan kepercayaan pengamat bahwa hasil yang diperoleh memenuhi syarat ketelitian tersebut.

Untuk tingkat kepercayaan 92% dan tingkat ketelitian kurang lebih 8%, maka besar sampel yang dibutuhkan adalah :

$$N' = \left[\frac{k/s \sqrt{N \Sigma(\Sigma X^2) - (\Sigma(\Sigma X))^2}}{\Sigma(\Sigma X)} \right]^2$$

Dimana : K = Tingkat kepercayaan dalam pengamatan ($k = 2, 1 - \alpha = 92\%$)
 S = Derajat ketelitian dalam pengamatan (8%)
 N' = Jumlah sampel yang dibutuhkan
 N = Jumlah sampel percobaan
 X = Nilai pengamatan

Apabila besarnya $N' < N$, maka sampel yang diambil sudah mencukupi, dengan kata lain sampel yang diambil telah mewakili populasi yang diamati.

Uji keseragaman data dimaksudkan untuk menentukan bahwa waktu rata-rata kerusakan dari mesin-mesin yang dijadikan sampel memiliki penyimpangan yang normal dari nilai rata-ratanya pada tingkat kepercayaan/signifikansi tertentu. Data dianggap seragam bila seluruh waktu rata-rata tiap mesin berada dalam cakupan *range* antara batas bawah dan batas atas. Berikut langkah-langkah untuk menentukan batas atas dan batas bawah.

Berikut langkah-langkah untuk menentukan batas atas dan batas bawah :

- Garis Tengah = Nilai rata-rata
- Batas Atas = Nilai rata-rata + ($K * SD$)
- Batas Bawah = Nilai Rata-rata – ($K * SD$)

Dimana : K = Tingkat kepercayaan dalam pengamatan ($k = 2, 1-\alpha = 92\%$)
 SD = Standar Deviasi :

$$\sqrt{\frac{\Sigma(\Sigma\bar{X} - \Sigma(\Sigma\bar{X})^2)}{(n - 1)}}$$

$\Sigma\bar{X}$ = Nilai rata-rata tiap mesin

n = Jumlah mesin yang diteliti