MODEL ANTRIAN PADA JALAN RAYA

Oleh : Yani Iriani Dra

Abstrak

Dalam makalah ini akan dijelaskan tentang suatu model antrian yang akan diterapkan pada arus lalu lintas jalan raya. Permasalahan dalam jaringan lalu lintas sangatlah berbeda dengan jaringan telepon. Penjadwalan optimal dalam jaringan lalu lintas sangat bermanfaat.

Langkah pertama ialah mempersiapkan kapasitas yang memenuhi syarat untuk arus rata-rata melalui sistem, kecuali terdapat kepadatan yang konstan. Jika kapasitas memenuhi syarat, kepadatan masih dapat terjadi disebabkan arus yang tidak tetap, teori antrian menjelaskan keadaan ini.

1. PENDAHULUAN

Teori Antrian telah diperkenalkan oleh Erlang sejak tahun 1900 pada lalu lintas telepon. Sekarang kenyataannya berkembang dengan pesatnya dan dapat digunakan pada masalah-masalah yang ada hubungannya dengan kepadatan, juga dapat diterapkan pada lalu lintas jalan raya. Lalu lintas kendaraan berbeda dengan lalu lintas telepon, sekurang-kurangnya mengandung 3 hal, yatitu :

a. Dipandang sebagai suatu proses stokastik, posisi kendaraan dalam ruang dan waktu yang tidak identik, hal ini merupakan akibat dari pada perbedaan kecepatan.
b. Terdapat perbedaan ukuran kendaraan hal ini menimbulkan gangguan dan kecepatan lokal yang disebabkan adanya interaksi.

c. Kecepatan perjalanan yang terbatas dan kendaraan tidak bebas bergerak. Kendaraan merupakan subyek untuk pengendalian dan kendaraan mencoba menghindari tabrakan.

Permasalahan dalam jaringan lalu lintas sangatlah berbeda dengan jaringan telepon. Penjadwalan optimal dalam jaringan lalu lintas sangantlah berfaedah. Langkah pertama ialah mempersiapkan kapasitas yang memenuhi syarat untuk arus rata-rata melalui sistem, kecuali terdapat kepadatan yang konstan. Jika kapasitas memenuhi syarat, kepadatan masih dapat terjadi disebabkan arus yang tidak tetap, teori antrian menjelaskan keadaan yang tidak tetap ini.

2. MODEL ANTRIAN

Pengertian kepadatan di atas dapat timbul dalam dua hal, yaitu :

a. Terdapat pembatasa dalam pelayanan, karena para langganan terbatas jumlahnya yang dapat dilayani pada suatu waktu tertentu, dan kepadatan menyebabkan para langganan yang tidak dilayani harus antri dan menunggu giliran. Contoh : Antrian kendaraan yang sedang menunggu di gerbang tol.

b. Terdapat pembatasan dalam pelayanan karena pelayanan dapat diberikan dalam waktu yang terbatas. Contoh : Para pejalan kaki sedang menunggu untuk menyeberang di tempat-tempat penyeberangan pejalan kaki.

Tujuan praktis dalam meneliti suatu sistem yang berhubunagn dengan kepadatan adalah untuk mengubah sistem yang ada agar suiasana menjadi lebih nyaman. Teori antrian dapat meramalkan jumlah kepadatan yang terjadi disebabkab serangkaian perubahan-perubahan dengan demikian membantu untuk memiliki satu yang terbaik. Dua ciri utama dari sistem antrian yang penting dan praktis adalah:

a. Rata-rata dan distribusi panjang waktu sebuah kendaraan berada suatu antrian dan pada waktu tunggu total sama dengan waktu antrian ditambah dengan waktu pelayanan.
b. Rata-rata dan distribusi banyaknya kendaraan pada sistem pada waktu sebarang.

Pada kuantitas-kuantitas ini nilai rata-rata adalah nilai paling sering diperlukan. Ada tiga ciri utama dari pada sistem yang harus diperinci. :

a. Pola tiba rata-rata dan distribusi tempat lowong
b. Distribusi pelayanan rata-rata waktu pelayanan dan banyaknya jalur.
c. Disiplin antrian seperti pertama datang pertama dilayani.

Di dalam makalah ini dibahas tentang antrian yang sederhana dengan tiba dan berangkat yang acak. Ini berati bahwa waktu tiba dalam distribusi Poisson dengan paramater λ. Keberangkatan juga acak, ini berarti distribusi waktu pelayanan merupakan distribusi eksponensial negatif dengan rata-rata $1/\mu$. Misalkan $P_n(t)$ menyatakan peluang bahwa antrian dalam keadaan n (yaitu ada n kendaraan) pada waktu t dengan memandang waktu $[t + \delta t]$. Keadaan n dapat diperoleh dalam 3 cara, yaitu :

a. Keadaan n , tidak ada yang tiba, tidak ada yang berangkat dan peluangnya adalah sebagai berikut :

$$P_n(t)\,[1 - \lambda.\delta t]\,[1 - \mu\delta t] + 0\,[\delta t]$$

b. Keadaan (n – 1), satu yang tiba, tidak ada yang berangkat dan peluangnya ialah :

$P_{n-1}(t)\ [\lambda.\delta\ t]\ [1 - \mu\delta\ t] + 0\ [\delta\ t]$

c. Keadaan (n + 1) tidak ada yang tiba, satu yang berangkat dan peluangnya adalah :

$P_{n+1}(t)\ [1 - \lambda.\delta\ t]\ [\mu\delta\ t] + 0\ [\delta\ t]$

Jumlah semua peluangnya adalah sebagai berikut :

$P_n\ [t + \delta\ t] = P_n(t)\ [1 - \lambda.\delta\ t]\ [1 - \mu\delta\ t] + P_{n-1}(t)\ [\lambda.\delta\ t]\ [1 - \mu\delta\ t] + P_{n-1}(t)$ $[1 - \lambda.\delta\ t]\ [\mu\delta\ t] + 0\ [\delta\ t]$; $n > 0$.

Dan $P_o[t + \delta\ t] = P_o(t)\ [1 - \lambda.\delta\ t] + P_1\ [\mu\delta\ t]\ [1 - \mu\delta\ t] + 0\ [\delta\ t]$ yang akan

$$\frac{P_0[t+\delta\ t] - P_n(t)}{\delta\ t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) +$$

$$\lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) + \frac{0(\delta\ t)}{\delta\ t},\quad n > 0$$

$$\frac{P_0[t+\delta\ t] - P_0(t)}{\delta\ t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) + \frac{0(\delta\ t)}{\delta\ t}$$

memberikan :

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -(\lambda+\mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t);\ n > 0$$

$$\frac{\partial P_n(t)}{\partial t} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t)$$

Dengan menggunakan Metode Fungsi Generator (Pembangkit), ambil :

$$\pi(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(t) S^n\ ;\quad 0 < s < 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.1)$$

Kalikan n persamaan deng S^n dan penjumlahan memberikan :

$$\frac{\partial}{\partial t}[\pi(s,t)] = \pi(s,t)\,\mu\frac{1-s}{s} - \lambda\,(1 - s) - \mu\frac{1-s}{s}P_0(t)$$

Persamaan ini dapat diselesaikan secara umum, tetapi kita sangant tertarik dalkam kasus ini dimana proses antrian telah diselesaikan, ini merupakan keadaan dalam keseimbangan. Untuk penyelesaian keseimbangan kita membuat dugaan bahwa peluang tidak tergantung pada waktu, sehingga ruas kiri sama dengan nol dan $\pi(s, t)$ menjadi $\pi(s)$, maka $\pi(s)[\mu - \lambda.s] - \mu P_o = 0$

$$\pi(s) = \frac{P_0}{1-s\rho} \text{.........................}(1.2)$$

Ambil s = 1, maka persamaa (1.1) memberikan :

$$\pi(1) = \sum_{0}^{\infty} P_n(t) = 1$$

Dan substitusikan ke dalam persamaan (1.2), diperoleh :

$P_o = 1 - \rho$

Oleh sebab itu :

$$\pi(s) = \frac{1-\rho}{1-s\rho}$$

Sekarang $\pi(s)$ merupakan fungsi pembangkit dari distribusi geometris dan P_n meripakan koefisen dari S^n dalam ekspansi dari $\pi n(s)$, yakni :

$P_n = \rho^n (1 - \rho)$; n = 0, 1, 2, 3, ...

Ini merupakan asimtot (bentuk panjang) peluang panjang antrian dan rat-rata panjang antrian diberikan oleh :

$$(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho^{N} = (1-\rho)(\rho + 2\rho^2 + 3\rho^3 + \ldots\ldots\ldots)$$

$$= \frac{\rho}{1-\rho}$$

Dengan cara yang sama, variansi diberikan oleh persamaan sebagai berikut :

$$(1-\rho)\sum_{n=1}^{\infty} n\rho - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho(1-\rho)(1-\rho)}{(1-\rho)^3} - \frac{\rho^2}{(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

Jika $\rho < 1$, maka π (s) merupakan fungsi pembangkit peluang dengan $\rho_0 = (1 - \rho)$

Ada penyelesaian keseimbangan dan antrian stabil.

Jika $\rho \geq 0$, maka π (s) bukan merupakan fungsi pembangkit peluang karena bentuknya nol tau negatif.

Jika $\rho > 1$, maka tidak ada penyelesaian keseimbangan, dan antrian tidak stabil dan perkembangannya tidak tetap. Secara kualitatif kasus $\rho = 1$ lebih sulit untuk diterangkan, Ttetapi untuk tujuan-tujuan praktis dapat digolongkan dengan $\rho > 1$. Untuk ρ dekat dari kiri mengakibatkan ketergantungan pada waktu tiba dan ukuran antrian dan dapat menentukan apakah suatu keadaan keseimbangan dapat berlangsung terus atau tidak. Jika $\rho < 1$ dan variansi lebih besar dari rata-rata, dan jika ρ 1 yakni antrian mendekati penyerapan, variansi menjadi lebih besar. Di dalam bentuk praktis rata-rata panjang antrian merupakan hal yang pokok untuk keadaan yang tidak tetap dan dapat memberi petunjuk waktu menunggu yang besar. Peluang untuk mendapatkan lebih n kendaraan dalam antrian ialah ρ^{n+1}, sebab itu jika ρ antrian sedikit panjang adalah sangat tidak mungkin terjadi. Tabel 1.1 memberikan ukuran rata-rata antrian dan peluang lebih dari 5 kendaraan dalam antrian untuk berbagai intensitas lalu lintas.

Sekarang pandang waktu tunggu dari masing-masing kendaraan yang didefinisikan sebagai waktu pelayanan. Pandang suatu antrian ada waktu t dan misalkan W(x, t) fungsi kepadatan peluang dari waktu tunggu, dengan demikian fungsi distribusi kumulatif W(x, t) di mana :

$$W(x,t) = \int_0^x w(x,t)dx = \text{Prob (waktu tunggu} \le x \text{ pada saat t)}$$

Tabel 1. Rata-rata panjang antrian

ρ	Rata-rata panjang antrian	Peluang bahwa panjang antrian melebihi 5 kendaraan
0.1	0.111	0.000
0.2	0.250	0.000
0.3	0.429	0.001
0.4	0.667	0.004
0.5	1.000	0.016
0.6	1.500	0.047
0.7	2.333	0.118
0.8	4.000	0.262
0.9	9.000	0.531

Sekarang antrian kosong dengan peluang (1 - ρ) dan dalam kasus ini waktu tunggu adalah nol. W(x, t) mempunyai komponen diskrit pada awal dari ketinggian (1 - ρ). Jika antrian tidak kosong, waktu tunggu sama dengan jumalah waktu pelayanan residu dari kendaraan yang dilayani. Jika distribusi waktu pelayanan adalah eksponensial negatif, distribusi waktu tunggu adalah jumlah (n – 1) eksponensial negatif doitambah distribusi waktu tunggu residu. Distribusi terakhir juga eksponen negatif karena menyatakan sifat keacakan, bahwa distribusi panjang tempat kosong adalah sama baik panjang telah dipindahkan atau tidak. Dengan mudah kita dapat tunjukkan sebagai berikut :

Jika Prob (X ≤ x) = 1 – $e^{-\mu x}$, maka peluang bersayarat diberikan oleh :

$$\mathrm{Prob}(X \le x \mid X > x_0) = \frac{\mathrm{Prob}(x_0 < X < x)}{\mathrm{Prob}(X > x)}$$

$$= e^{\mu x_0} \int_{x_0}^{x} \mu \, e^{-\mu x} dz$$

$$= 1 - e^{-\mu(x - x_0)}$$

Dan x_0 menyatakan awal yang baru adalah 1 – $e^{-\mu x}$.

Oleh sebab itu distribusi bersyarat dari waktu tunggu W(x| n) adalah jumlah dari n distribusi eksponensial negatif. Ada banyak cara untukm memperoleh distribusi jumlah di atas antara lain menggunakan Metode Fungsi Pembangkit Momen. Fungsi Pembangkit Momen untuk eksponensial negatif dengan parameter μ diberikan oleh :

$$M(t) = E(e^{tx})\int_0^x e^{tx}\ \mu\ e^{-\mu x}dx = \frac{\mu}{\mu - t} = \left(1 - \frac{t}{\mu}\right)^{-1}$$

Suatu teori yang kita kenal bahwa fungsi pembangkit Momen dari jumlah n variabel bebas adalah perlkalian dari masing-masing fungsi pembangkit momen. Karenanya fungsi pembangkit momen untuk distribusi jumlah n eksponensial negatif adalah :

dan dapat dengan mudah diperlihatkan fungsi pembangkit momen dari distribusi Gamma :

$$W(x \mid n) = \frac{\mu}{\Gamma(n)}\ e^{-\mu x} x^{n-1}$$

Peluang antrian dari n anggota adalah (1 - ρ) ρn di dalam keseimbangan. Distribusi tak bersyarat dari waktu tunggu ditambah

$$W(x) = (1-\rho)\delta(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^n\ e^{-\mu x} x^{n-1}}{\Gamma(n)}(1-\rho)\rho^n$$

komponen diskrit, diberikan oleh :

di mana δ (x) adalah fungsi delta Direc, di mana ρ = λ/μ

$$W(x) = (1-\rho)\delta(x) + e^{-\mu x}(1-\rho)\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda x)^n}{n!}$$

$$W(x) = (1-\rho)\delta(x) + \rho\,(\mu-\lambda)e^{-\mu x+\lambda x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1.5)$$

diintegrasikan

$$W(x) = 1-\rho\, e^{-\mu(1-\rho)x}$$

Kalikan persamaan (1, 5) dengan x dan diintegrai dari 0 ke ∞

$$\text{Mean}: W(x) = {}^{tx})\int_0^x (1-\rho)x\delta(x) + \rho\,(\mu-\lambda)\int_0^x xe^{-(\mu-\lambda)x}dx$$

$$= \rho\,(\mu-\lambda)\frac{xe^{-(\mu-\lambda)x}}{\lambda-\mu}\Bigg|_0^{\infty} - \frac{1}{\lambda-\nu}\int_0^x xe^{-(\mu-\lambda)x}dx$$

$$= \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

Dengan cara yang sama, diperoleh :

$$\text{Var } W(x) = \int_0^{\infty} w(x)x^{2dx} - \frac{\rho}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

$$= \int_0^{\infty}(1-\rho)x^2\delta x\, dx + \rho(\mu-\lambda)\int_0^{\infty}x^2e^{-(\mu-\lambda)x}dx - \frac{\rho}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

$$= \frac{2\rho}{(\mu-\lambda)^2} - \frac{\rho}{\mu^2(1-\rho)^2} = \frac{\rho(2-\rho)}{\mu^2(1-\rho)^2}$$

Kasus yang lebih umum adalah waktu pelayanan adalah tidak menurut distribusi eksponensial negatif seperti yang ditunjukkan di atas. Hasil dibuat dengan mempertimbangkan sistem antrian hanya ada momen keberangkatan suatu kendaraan. Hal ini dapat di perlihatkan bahwa bila qn adalah banyaknya kendaraan di dalam antrian pada waktu pelayanan dari n kendaraan di pangkalan, maka Mean (rata-rata) banyak kendaraan di dalam antrian (dengan mengasumsikan kedatangan secara acak) diberikan oleh :

$$E(q_n) = \rho + \frac{\rho^2(1+L^2)}{2(1-\rho)}$$

Di mana L koefisien varaisi dari distribusi waktu pelayanan yakni rasio dari simpangan baku (standar deviasi) dari rata-rata(Mean).

Jika pelayanan adalah eksponensial, $L^2 = 1$, maka :

$$E(q_n) = \frac{\rho}{1-\rho} \text{......................}(1.6)$$

Jika pelayanan konstan, $L^2 = 0$, maka

$$E(q_n) = \frac{\rho(1-\frac{\rho}{2}}{1-\rho} \text{......................}(1.7)$$

Juga dapat diperlihatkan bahwa mean waktu tunggu di dalam kasus terakhir adalah :

$$\frac{\rho}{2\mu(1-\rho)}.$$

Yang merupakan setengah dari mean waktu tunggu untuk pelayanan acak. Rasio dari pernyataan dalam persamaan (1.7) dan (1.6) adalah : 1 - $\rho/2$.

Jika ρ kecil, maka sangat kecil pengurangan didalam ukuran mean antrian jika dibuat dari acak ke pelayanan reguler pengurangan sampai 50 % dengan ρ mendekati 1.

3. Analisis Pembahasan

Kita telah temukan sebelumnya dalam analisa sederhana untuk kedatangan dan keberangkatan secara acak, bahwa mean antrian untuk keadaan keseimbangan ialah :

$$\frac{\rho}{1-\rho}$$

Hasil ini berkenaan pada keadaan sembarang waktu. Kita dapatkan hasilnya sama untuk mean antrian didalam kasus dimana waktu diperhitungkan, yaitu saat suatu kendaraan baru saja menyelesaiakan pelayanan. Dapat juga diperlihatkan bahwa distribusi antrian pada waktu suatu pelayanan baru saja diselesaikan adalah sama dengan distribusi geometris sebagai suatu pemakaian antrian pada titik sembarang. Kenyataan ini berubah menjadi suatu sifat dari antrian yang kedatangannya secara acak dan tidak bisa mendapatkan bentuk yang lebih umum.

Tabel ini menunjukkan Mean kecepatan kedatangan di jalan minor (kecil) dan mean waktu pelayanan dari kendaraan, yang tergantung pada kecepatan kedatangan pada jalur mayor (besar).

Perhitungan dilakukan sebagai berikut :

Pelayanan	Mean panjang antrian	Mean waktu tunggu
Acak	$\dfrac{\rho}{1 - \rho}$	$\dfrac{\rho}{\mu(1 - \rho)}$
Reguler	$\dfrac{\rho(2 - \rho)}{2(1 - \rho)}$	$\dfrac{\rho}{2\mu(1 - \rho)}$

Selang antara kedatangan ditulis dan tabel kumulatif yang sukses dihitung dan dari mean ini diperoleh hasil sebagai berikut :

Tabel 2 : Rata-rata kedatangan

Selang antara Kedatangan	4	5	10	3	5	2	8	6	4
Tabel kumulatif		9	19	22	27	29	37	43	47
Mean(rata-rata)		4.5	6.3	5.5	5.4	4.9	5.2	5.3	5.2

Jika rata-rata diplot lagi banyaknya selang diperoleh suatu garis putus yang menyatakan beberapa nilai yang dapat dinyatakan sebagai mean kecepatan kedatangan dan dengan cara yang sama indeks waktu pelayanan. Tabel 1.2 memberikan mean panjang antrian untuk pelayanan acak reguler ubntuk beberapa nilai intensitas allu lintas yang berbeda. Tabel 1.2 dan 1.3 memperl;ihatkan bahwa kedua-duanya panjang antrian dan waktu tunggu, pelayanan reguler lebih baik bagi langganan.

Tabel 3 : Panjang antrian

Intensitas lalu lintas (ρ)	Mean panjang antrian Acak	Mean panjang antrian Reguler (teratur)
	$\dfrac{\rho}{1-\rho}$	$\dfrac{\rho(2-\rho)}{2(1-\rho)}$
0.1	0.111	0.106
0.2	0.250	1.225
0.3	0.429	0.364
0.4	0.667	0.533
0.5	1.000	0.750
0.6	1.500	1.050
0.7	2.333	1.517
0.8	4.000	2.400
0.9	9.000	4.950

Untuk ρ ≥ 0 mean waktu tunggu naik dengan cepat dengan bertambahnya ρ, karena itu pertambahan walau sedikit diwaktu intensitas lalul lintas sudah tinggi akan menyebabkan kamacetan. Dari data kita dapat menetapkan suatu model matematika dari suatu antrian. Ada ~~3 hal~~ yang harus diperhatikan, yaitu :

(i). Pelayanan dan kedatangan keduanya reguler (teratur). Ini adalah kasus trivial adan ada 2 alternatif :

$\lambda \leq \mu$: tak ada antrian

$\lambda > \mu$: panjang antrian menjadi tak terbatas

(ii). Pelayanan dan kedatangan keduanya acak ini lebih nyata , untuk

$\lambda \leq \mu \qquad P_n = \rho^n (1 - \rho)$

$$\text{Mean panjang antrian } \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

$$\text{Mean antrian + waktu pembayaran} = \frac{1}{\mu(1-\rho)}$$

$\lambda > \mu$: Antrian menjadi tak terbatas dan tidak ada rumus yang berlaku. Dalam praktek bila μ kurang dari 50 % lebih besar dari λ yakni $\rho < 0.7$, panjang antrian yang sedang dihadapi mean tidak besar dari mean keterlambatan adalah dua kali mean waktu pembayaran. Apabila $\rho >$ 0.8 mengakibatkan keduanya mean panjang antrian dan mean waktu hingga menjadi tak hingga.

(iii). Pelayanan reguler (tertatur), kedatangan acak.

Mean panjang antriuan dikurangi sampai setenganh dari (ii), tetapi akibatnya tetap masih ada. Sekarang pandang suatu hal yang sangat berati di dalam teknik lalu lintas waktu periode puncak bila permintaan lalu lintas melebihi kemampuan. Jika $\rho < 1$ masalah antrian dapat diselesaikan oleh pandangan penyelesaian keseimbangan yang bebas dari waktu. Untuk $\rho > 1$perlu memandang saat-saat transisi yang lalu lintas kontinu bertambah besar. Dalam kasus ini rata-rata panjang antrian E[q(t)] menjadi tak terbatas pada saat t meningkat. Pandang bahwa periode puncak, sistem dalam keseimbangan dengan intensitas lalu lintas awal $\rho_o = \lambda_o / \mu$ dan bahwa harapan banyaknya kendaraan dalam sistem adalah E[q]. Sekarang pandang bahwa ρo meningkat ke $\rho_o 1 = \lambda / \mu > 1$ dengan jalan demikian bahwa waktu pelayanan atau kecepatan pemberangkatan μ adalah konstan, sebelum dan sesudah periode puncak. Pandang kasus di mana keduanya baik kedatangan maupun keberangkatan adalah acak dengan rata-rata masing-masing λ dan μ. Mean banyaknya dalam sistem pada waktu t setelah masa puncak dimulai diberikan oleh kenaikan nilai keseimbangan banyaknya kedatangan dan penurunan banyaknya kberangkatan dalam waktu t, jadi :

$E[q(t)] \approx E(1) + (\lambda - \mu) t$

$= E(q) + \mu(\rho 1 - 1) t$ ....(1.8)

Dengan cara yang sama, variansi merupakan jumlah komponen diberikan oleh :

$\text{Var}[(q)] = \text{var}(q) + \text{var}[\lambda(t)] + \text{var}[\mu(t)]$

Tetapi E(q) dan var (q) diberikan oleh analisa keseimbangan sebagai

$$E(q) = \frac{\rho_o}{1-\rho_0}, \qquad \text{Var(q)} = \frac{\rho_o}{1-\rho}$$

Juga variansi [λ (t)] dan Var [μ (t)] adalah variansi banyaknya kedatangan dan variansi banyaknya keberangkatan, dalam waktu t yakni λt dan μt. Bila distribusinya Poisson, Variansi sama dengan Mean,

$$[E|q(t)] \equiv \frac{\rho_o}{1-\rho_0} + \mu(\rho_1 - 1)t$$

$$[Var|q(t)] \equiv \frac{\rho_o}{(1-\rho_0)^2} + \mu(\rho_1 - 1)t$$

maka :

Jika waktu pelayanan konstan mengikuti eksponensial negatif, persamaan (1.8) menjadi :

$$E(q) = \frac{\rho_o(1-1/2\rho_0)}{1-\rho_0}$$

Karenanya dalam kasus ini :

$$[E|q(t)] = \frac{\rho_o(1-1/2\rho_0)}{1-\rho_0}$$

Pandang contoh sederhana antrian dengan kecepatan kedatangan acak kendaraan dan mean waktu pelayanan 40 detik, maka :

$$\rho_0 = \frac{40}{60} = \frac{2}{3}$$

Sekarang pandang kecepatan kedatangan dua kendaraan per menit, sehingga :

$$\rho_1 = \frac{2(40)}{60} = \frac{4}{3}$$

Dan pandang bahwa kecepatan ini diperetahankan selama jam berikutnya waktu pelayanan tidak ditunda dan kedatangan masih acak, maka :

$$E[2(60)] = \frac{2/3}{1-2/3} + 3/2(4/3-1)60 = 32$$

Yakni nilai harapan dari panjang antrian setelah 1 jam adalah 32. Dalam kasus dari waktu pelayanan konstan 40 detik, rumus yang berhubungan dengan itu, adalah :

$$E[2(60)] = \frac{2/3(1-1/3)}{(1-2/3)} + \frac{3}{2}(\frac{4}{3}-1)60 = 31\frac{1}{3}$$

Pada umumnya dapat diperlihatkan secara nyata bahwa distribusi waktu oelayanan pada waktu puncak tidaklah kritis. Dapat dicatat bahwa Var [q(t)] sangatlah besar (dalam kasus ini = 221) dan panjang antrian dalam keadaan ramai dapat di bawah kondisi nilai rata-rata, karenanya sangtlah tidalk berarti.. Pertanyaan sekarang bagaimana panjang antrian jam sibuk berakhir bila intensitas lalul lintas sekali lagi bernilai sebelum puncak ρo. Cox dan Smith dalam referensi sudah membuat asumsi bahwa waktu pelayanan konstan dan pada saat ρ kembali ke ρo < 1 banyaknya kendaraan dalam antrian membesar. Mereka juga mendefinisikan titik di mana antrian berakhir dan waktu pelayanan bagi kendaraan yang baru tiba sama dengan rata-rata waktu antrian dari kendaraan bila sistem dalam keadaan keseimbangan. Jika T waktu berakhirnya antrian dari titik yang ρ menjadi ρ_0 persamaan yang dikembangkan oleh Cox dan Smith adalah :

$$E[T] = \frac{1}{(1-\rho_0)}\left[\frac{E[q(t)]}{\mu} - \frac{\rho_0}{q(1-\rho_0)}\right]$$

$$Var[T] = \frac{\rho_0}{\mu(1-\rho_0)^2}\left[\frac{E[q(t)]}{\mu} - \frac{\rho_0}{2(1-\rho_0)^2}\right] + \frac{1}{\mu^2}\left[\frac{Var[q(t)]}{(1-\rho_0)^2}\right]$$

Dari contoh di atas, diperoleh : E[T] = 61 menit

Var [T] = 1111, di mana ρ (T) ≈ 33 menit.

Jadi akibatnya, jam sibuk berakhir rata-rata lebih dari 1 jam dan standar deviasi sekitar ½ jam.

4. Kesimpulan

Dari hasil tersebut di tas dapat ditarik kesimpulan bahwa arus lalu lintas akan terjadi pada setiap selang waktu antara kedatangan dan pelayanan. Selain itu karena jumlah kendaraan yang masuk dalam sistem natrian tidak beraturan, maka didapatkan pola untuk kedatangan (distribusi Poisson) dan pola pelayanan (distribusi Eksponensial) ,yaitu mengikuti pola deterministik yang menggunakan satu saluran untuk pelayanan dan banyaknya antrian kendaraan yang masuk ke dalam sistem antrian yang tidak beraturan, maka disiplin antriannya adalah General Service Discipline dan antrian tak berhingga.

DAFTAR PUSTAKA

1. Cox D.R and Smith, W. L., *Queues*, London : Methuen, New York, Wiley 1961.
2. Robert V.Hogg and Allen T.Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, London : Collier Limited, New York : Wiley.
3. Winifren D. Ashton, *The Theory of Road Traffic Flow,* London : Mathuen, New York : Wiley.